

---

**PRICING DEGLI STRUMENTI RISK RATE SENSITIVE  
ED IMPLICAZIONI PER IL RISK MANAGEMENT**

Luca Ferraro <sup>\*</sup>, Pasqualina Porretta <sup>\*\*</sup>, Massimo Proietti <sup>\*\*\*</sup>, Mario Rosati <sup>\*\*\*\*</sup>

**INDICE**

1. <i>Introduzione al problema</i> .....	2
2. <i>I derivati risk rate sensitive: volumi di scambio</i> .....	2
3. <i>Il pricing dei derivati ed introduzione alla formula di Black</i> .....	4
4. <i>Oltre la formula di Black: il framework Short Rate</i> .....	5
5. <i>Introduzione ai Market Model</i> .....	8
6. <i>Riflessioni per l'attività di risk management e conclusioni</i> .....	10

---

\* Ricercatore del gruppo di Finanza Quantitativa del CASPUR (Consorzio interuniversitario per le Applicazioni di Supercalcolo Per Università e Ricerca).

\*\* Ricercatore non confermato, Università degli Studi di Roma 'La Sapienza', Dipartimento Banche, Assicurazioni Mercati.

\*\*\* Responsabile dell'Ufficio di Financial Control di Iccrea Banca.

\*\*\*\* Responsabile del Gruppo di Finanza Quantitativa del CASPUR.

Il paper è frutto di riflessioni congiunte degli autori, tuttavia, Porretta P. è autrice dei paragrafi 1, 2 e 3, Ferraro L. e Rosati M. sono autori dei paragrafi 4 e 5 e Proietti M. è autore del paragrafo 6.

---

## 1. Introduzione al problema

Il mercato dei derivati *risk rate sensitive* ha fatto registrare, negli ultimi decenni, un rapido incremento degli scambi, sia sui mercati *over the counter* che su quelli di borsa, e una brusca frenata, solo nell'ultimo anno, a motivo della crisi finanziaria che ha investito i mercati internazionali [BIS, *Quarterly Review*, December 2008].

La crescita degli scambi dei derivati *risk rate sensitive* è riconducibile ai numerosi utilizzi che questi strumenti trovano nell'attività di *risk management* di un'impresa reale o finanziaria, alla possibilità di coprirsi, speculare, arbitraggiare sull'andamento della *yield curve* limitando l'esborso economico iniziale (a motivo dell'effetto *leverage*). Per far fronte alle diverse esigenze finanziarie e commerciali della clientela privata e istituzionale, l'ingegneria finanziaria ha progettato e diffuso derivati su tasso più complessi, strutturati, a cui ci si riferisce generalmente come "strumenti di seconda generazione". Questi strumenti spesso hanno un *payoff* più complesso rispetto ai derivati standard (*plain vanilla*) ed un profilo di rischio difficile da quantificare.

Il *pricing* degli strumenti *risk rate sensitive di seconda generazione* presenta una complessità di natura metodologica, richiedendo il ricorso a modelli capaci di descrivere la possibile evoluzione della struttura a termine dei tassi, nel corso della durata del contratto. In questo ambito si collocano i modelli del *framework Short Rate Model* e *Market Model (MM)*.

In tale prospettiva, il presente lavoro intende<sup>1</sup>:

- A. esaminare caratteristiche e limiti di applicabilità dei diversi modelli del *framework Short Rate* per il *pricing* dei derivati su tasso [Black 1973, Hull J.C e White 1990];
- B. analizzare i presupposti teorici del *framework Market Model* e le relative tecniche di calibrazione dei parametri del modello ai dati di mercato [Stacey A., Joshi 2007; Damiano Brigo, Fabio Mercurio, 2001/2006; Rebonato 2003; Daniel J. Stapleton and Richard C. Stapleton 2003; Brace A., Gatarek D., Musiela M. 1996];
- C. analizzare, infine, le implicazioni per il *risk manager* derivanti dalla gestione di un *book* di derivati su tasso.

## 2. I derivati *risk rate sensitive*: volumi di scambio

Il volume e la complessità finanziaria degli strumenti derivati negoziati *over the counter* (OTC)<sup>2</sup> hanno fatto registrare nell'ultimo ventennio un andamento crescente. Dalle statistiche della BRI risulta che, dal 1998, c'è stata una crescita media annua del 20% (in termini nozionali) dell'attività in derivati finanziari e creditizi OTC svolta dalle banche a livello mondiale e l'incremento è stato ancora più sostenuto nel periodo compreso tra il 2005-2007<sup>3</sup>. Il valore nozionale è passato dai 281 trilioni di dollari a giugno 2005 ai 516 a giugno 2007 con una crescita vicina all'83%. Gran parte dei volumi di scambio è rappresentato, attualmente, da derivati finanziari su tassi di interesse (*interest rate swap*, opzioni su tasso, *forward rate agreement*<sup>4</sup>), mentre il mercato delle opzioni su *equity* rappresenta la fetta più piccola. Tra i comparti più dinamici c'è anche quello dei derivati creditizi che solo di recente ha subito una battuta di arresto in seguito alle turbolenze di mercato legate ai mutui *subprime* e alla conseguente riduzione delle operazioni di cartolarizzazione.

---

<sup>1</sup>Il presente lavoro si inserisce nell'ambito di una collaborazione tra il Dipartimento di Banche, Assicurazioni Mercati dell'Università degli Studi di Roma 'La Sapienza' ed il gruppo di Finanza Quantitativa del CASPUR. La collaborazione è finalizzata a progettare, implementare e testare, attraverso il ricorso al calcolo parallelo ad alte prestazioni, una soluzione per il *pricing* di strumenti *risk rate sensitive* basata su modelli di alta qualità, in grado di valutare portafogli complessi con tempi di risposta significativamente inferiori rispetto ad una soluzione tradizionale (sequenziale).

<sup>2</sup> Nel mercato *over the counter* (OTC) le caratteristiche del contratto (scadenza, prezzo d'esercizio, quantità negoziata) possono essere adattate alle esigenze dei clienti, non devono corrispondere a quelle specifiche delle borse regolamentate. Non esiste, in genere, la Cassa di Compensazione e Garanzia, ciò fa assumere rilievo al rischio di controparte connesso allo strumento derivato.

<sup>3</sup>Bank for International Settlements (BIS), (2008), *Quarterly Review*, www.bis.org.

<sup>4</sup> I derivati su tassi d'interesse risultano così composti: gli *interest rate swaps* rappresentano, in termini di valore nozionale, circa il 75 per cento (63 per cento del totale dei derivati in essere in Italia), le opzioni su tassi d'interesse il 20 e i *forward rate agreements* (fra) il 5 per cento. L'euro rimane di gran lunga la valuta più utilizzata, seguito dal dollaro. Il 64 per cento dei derivati su tassi d'interesse ha vita residua superiore all'anno.

Analogamente, la recente indagine sui derivati OTC condotta da Banca d'Italia<sup>5</sup> (Tabella 1) conferma, per il mercato italiano, la forte prevalenza in termini di volumi di scambio dei derivati su tassi di interesse. Tra questi, quelli maggiormente presenti nel portafoglio delle istituzioni creditizie nazionali sono gli *interest rate swap*, gli *interest rate cap*<sup>6</sup>/*floor*<sup>7</sup> e le *swaption*<sup>8</sup> europee.

**Tabella 1 - Italia: volumi delle contrattazioni in derivati suddivisi per categoria di rischio**

Categoria rischio	di	Fine 2007	giugno	Fine dicembre 2007	Variazione perc.le Dicembre '07/giugno '07	Quota perc.le Dicembre '07
<b>DERIVATI FINANZIARI</b>						
<b>Cambi</b>		1003,7		1124,6	12,0	11,7
<b>Tassi di interesse</b>		8225,8		8113,0	-1,4	84,5
<b>Azioni e commodity</b>		411,4		363,2	-11,7	3,8
<b>Totale</b>		9.640,9		9600,8	-04	100
Ammontare nominale o nozionale in essere: miliardi di dollari						

La diffusione dei derivati *risk rate sensitive* è riconducibile all'utile impiego che essi trovano nelle strategie di arbitraggio, di speculazione e di copertura<sup>9</sup> poste in essere, dalle imprese reali e finanziarie, per "rispondere" all'aleatorietà dei tassi di interesse sul mercato. In particolare:

- gli *interest rate floor* sono utilizzati per porre dei limiti inferiori ai tassi di interesse dei prestiti a tasso variabile o per speculare sul ribasso dei tassi;
- gli *interest rate cap* sono stati creati per fornire protezione, a chi contrae un prestito a tasso variabile, contro la possibilità che i tassi di interesse superino un certo livello (*cap rate*);
- le *swaption* (*payer* o *receiver*) sono state create per dare l'opportunità, ad una certa scadenza futura, a:
  - o lo speculatore di entrare in una posizione *long* (d'acquisto), qualora preveda un rialzo dei tassi o in una posizione *short* (di vendita) in caso di aspettative al ribasso sui tassi di interesse;

<sup>5</sup> Banca d'Italia, (2008), *Rilevazione sui prodotti derivati over-the-counter a fine dicembre 2007*, giugno.

<sup>6</sup> Portafoglio di opzioni i cui valori finali sono positivi quando un certo tasso di interesse variabile, osservato periodicamente, si trova sopra il tasso *cap*. Ognuna delle singole opzioni che costituisce il *caps* è detta *caplet*. Essi possono essere considerati come portafogli di *puts*, con scadenza uguale alla data di esercizio, scritte su *zero coupon bonds*. Cfr. Hull J. C. , (2006), *Opzioni, futures e altri derivati*, Pearson, Prentice Hall, cap. 26; Di Franco M., Polimeni F., Proietti M., (2002), *Opzioni e titoli strutturati*, Il sole 24 ORE, cap. 26.

<sup>7</sup> Portafoglio di opzioni i cui valori finali sono positivi quando un certo tasso di interesse variabile, osservato periodicamente, si trova sotto il tasso *floor*. Ognuna delle singole opzioni che costituiscono il *floor* è detta *floorlet*. Essi possono essere considerati come portafogli di *calls*, con scadenza uguale alla data di esercizio, scritte su *zero coupon bonds*. Cfr. Hull J. C. , (2006), op.cit., cap. 26; Di Franco M., Polimeni F., Proietti M., (2002), op. cit., cap. 26.

<sup>8</sup> Opzione finalizzata a concludere uno swap su tassi di interesse ad un tasso swap predeterminato. Le *swaption* si distinguono in *call* o *payer swaption* e in *put* o *receiver swaption*. Le prime conferiscono all'acquirente la facoltà di acquistare uno swap, mentre le seconde conferiscono la facoltà di vendere uno swap. Il compratore di una *payer swaption* avrà convenienza ad entrare nello swap (pagare fisso e ricevere il variabile) se il tasso swap corrente di mercato alla scadenza dell'opzione sia maggiore del tasso *swap strike*. Per converso, l'acquirente di una *receiver swaption* troverà conveniente esercitare l'opzione (pagare il variabile e ricevere il tasso fisso) se il tasso se il tasso swap corrente di mercato alla scadenza dell'opzione sia inferiore del tasso *swap strike*. Le *swaptions* rappresentano un'alternativa rispetto *forward swap*, detti anche swap differiti (*deferred swaps*). Questi ultimi però non comportano costi iniziali ma hanno lo svantaggio di obbligare l'acquirente ad entrare in un certo swap. Cfr. Hull J. C. , (2006), op. cit., cap. 26; Di Franco M., Polimeni F., Proietti M., (2002), op. cit., cap. 26.

<sup>9</sup> Le coperture mirano a ridurre i rischi, le speculazioni fanno assumere nuovi rischi e gli arbitraggi consentono di bloccare profitti privi di rischi senza investire capitale.

- a chi deve fare attività di *hedging* di entrare in una posizione *long* (se debitore a tasso variabile o creditore a tasso fisso che teme un rialzo dei tassi) o in una posizione *short* (se debitore a tasso fisso o creditore a tasso variabile che teme un ribasso sui tassi di interesse).

Questa tipologia di prodotti, comunemente nota come *derivati plain-vanilla*, può essere valutata con la formula di Black, che rappresenta un'estensione del modello di Black&Scholes (B&S), uno dei modelli più utilizzati per la determinazione del prezzo equo di un'opzione europea.

### 3. Il pricing dei derivati ed introduzione alla formula di Black

Il modello di B&S è stato sviluppato agli inizi degli anni '70 (1973) da Fischer Black, Myron Scholes (B&S)<sup>10</sup> e Robert Merton<sup>11</sup> per valutare le opzioni su *equity (stock options)* e *commodity*. Questo modello ha avuto un'enorme influenza sul modo in cui gli operatori valutano le opzioni ed effettuano le coperture ed ha rappresentato la base di partenza degli sviluppi dell'ingegneria finanziaria avuti negli anni '80 e '90.

Il modello di B&S presuppone che il prezzo del titolo sottostante (l'azione) segua un moto geometrico *browniano*<sup>12</sup> (o di Wiener) con distribuzione log-normale<sup>13</sup> e che la volatilità del rendimento sia costante. Il successo e la diffusione del modello furono tali che gli operatori tentarono di riutilizzare ed estendere il modello al *pricing* di prodotti derivati su tasso. Tuttavia l'ipotesi di B&S sull'andamento *browniano* dell'*underlying* si adatta male ai derivati *risk rate sensitive*: il comportamento probabilistico della curva dei tassi è infatti molto diverso da quello delle azioni. Con la diffusione di questi prodotti sul mercato, la letteratura in materia ha elaborato aggiustamenti e modifiche sull'architettura di base del modello B&S calibrati, di volta in volta, sulle peculiarità delle opzioni da valutare.

Tra le estensioni di B&S è da rilevare il *modello di Black*<sup>14</sup> che, sotto certe condizioni, è utile per determinare il valore di derivati *risk rate sensitive* di tipo europeo. Il *modello di Black* calcola il valore finale dell'opzione ipotizzando la log-normalità dell'*underlying*<sup>15</sup> alla scadenza dell'opzione e l'uguaglianza tra il valore atteso dell'*underlying* e il prezzo *forward* della variabile. Nel *modello di Black*, il prezzo di una *put* ( $p$ ) o di una *call* ( $c$ ) dipendente da un tasso d'interesse è dato dalla seguente formula:

$$c = FN(d_1) - KN(d_2)$$

$$p = KN(-d_2) - FN(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}}; d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

dove  $T$  è la data di scadenza dell'opzione,  $F$  è il valore atteso del tasso *forward*,  $K$  è lo *strike* d'esercizio dell'opzione,  $\sigma$  è la *implied volatility* relativa al tasso  $F$  e  $N(x)$  è la distribuzione cumulativa.

Il modello di Black è divenuto lo standard di mercato per la valutazione dei prodotti *plain-vanilla (cap/floor, swaption europea, bond option)*, tanto che è prassi oggi esprimere il prezzo di questi strumenti

<sup>10</sup> Black F., Scholes M., (1973), *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, 81, May-June, 673-59.

<sup>11</sup> Merton R. C., (1973), *The relationship between put and call prices: comment*, Journal of Finance, 28, 183-4; Merton R. C., (1973), *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science, Spring, 141-83; Merton R. C., (1974), *On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates*, Journal of Finance, 29, 2, 449-70.

<sup>12</sup> I processi di Wiener (a volte chiamati "moti" *Browniani*), studiati da R. Brown (1826) e, successivamente, da Wiener (1918), originariamente sono stati usati in fisica per descrivere il movimento delle particelle soggette ad un gran numero di piccoli shock molecolari e poi in finanza per descrivere l'andamento del prezzo di un titolo azionario. Essi presentano due peculiarità: il valore atteso della variabile, in ogni istante temporale, è pari al suo valore corrente (considerando che il tasso di crescita atteso viene ipotizzato nullo), la varianza è uguale a 1. L'andamento del prezzo di un titolo di tipo *browniano* varia in funzione di due fattori: uno prevedibile, cioè il trend di crescita attesa e uno stocastico, non prevedibile ma stazionario (tasso di varianza è uguale a 1). Cfr: Hida T., (1980), *Brownian Motion*, Springer, 1980; Karatzas I., S. Shreve, (1998), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer; vedi anche nota n. 13.

<sup>13</sup> La distribuzione log-normale è asimmetrica così che media, mediana e moda sono diverse l'una dall'altra.

<sup>14</sup> Black, F. (1976), *The Pricing of Commodity Contracts*, Journal of Financial Economics, 3, 167-179.

<sup>15</sup> La prima assunzione implica che, quando il *modello di Black* è utilizzato per valutare *interest rate derivatives*, l'ipotesi di log-normalità riguarda: nel caso delle *bond option* europee, il prezzo dell'obbligazione sottostante, nel caso dei *caps*, il tasso di interesse sottostante ognuno dei *caplet* e nel caso delle *swaptions*, il tasso *swap* sottostante.

---

direttamente attraverso la *implied volatility* della variabile sottostante che, utilizzata nella formula di Black, ne fornisce il prezzo.

#### 4. Oltre la formula di Black: il framework Short Rate

Nonostante sia tutt'oggi uno standard di mercato per la valutazione dei *cap/floor* e delle *swaption europee*, la formula di Black non consente di ottenere una descrizione di come i tassi d'interesse evolvono nel tempo e, quindi, non può essere utilizzata per il *pricing* di derivati sul tasso d'interesse che prevedano l'esercizio anticipato (*Bermudan e/o American Swaption*) o che abbiano un *payoff* di tipo *path-dependent*, ovvero dipendente dall'andamento puntuale nel tempo dei tassi d'interesse.

Per affrontare il *pricing* di queste tipologie di strumenti, a partire dalla fine degli anni '70, in letteratura sono stati proposti i cosiddetti modelli della *term structure*, ovvero modelli in grado di descrivere l'evoluzione nel tempo dell'intera *zero curve*; particolare successo nella realtà operativa hanno avuto un'ampia classe di modelli appartenenti al *framework Short Rate*, che consentono di descrivere l'evoluzione nel tempo del "tasso d'interesse istantaneo", una variabile non osservabile sul mercato, ma sulla base della quale è possibile esprimere, in modo relativamente semplice, il *payoff* dei principali strumenti *risk rate sensitive*.

I primi modelli di tipo *Short Rate* proposti in letteratura sono i cosiddetti "modelli di equilibrio", in cui l'equazione differenziale stocastica che regola l'evoluzione nel tempo del tasso a breve contiene un termine di *drift* istantaneo ed una deviazione standard, nel termine aleatorio, che possono dipendere dal tasso d'interesse stesso, ma sono indipendenti dal tempo. Si tratta di modelli che prevedono un solo fattore di rischio e che pertanto implicano che, ad ogni istante di tempo, tutti i tassi siano totalmente correlati tra loro.

Tra i modelli *Short Rate* di equilibrio ad un fattore si annoverano:

- il *modello di Rendlemann e Barter*<sup>16</sup> (1980), che assume che il tasso di interesse a breve evolve nel tempo come il prezzo di un'azione (*moto geometrico browniano*) con  $\mu$  e  $\sigma$  costanti

$$dr = \mu r dt + \sigma r dz$$

Nella realtà, i tassi di interesse tendono nel tempo a riportarsi verso un livello medio, fenomeno noto come *mean reversion* (ritorno verso la media); quando il tasso di interesse è alto, la *mean reversion* tende a determinare un *drift* negativo<sup>17</sup>, quando è basso la *mean reversion* tende a determinare un *drift* positivo.

- il *modello di Vasicek*<sup>18</sup> (1977), che assume che il tasso di interesse a breve evolve nel tempo secondo un processo che incorpora la *mean reversion*:

$$dr = a(b-r)dt + \sigma dz$$

dove  $a$  e  $b$  sono costanti.

In tale prospettiva, il tasso a breve viene spinto verso il livello  $b$  con una velocità pari ad  $a$ . Accanto a questa forza di attrazione verso la media c'è un termine stocastico  $\sigma dz$  distribuito in maniera normale. In questo modello, però, il tasso a breve può risultare negativo.

- il *modello di Cox, Ingersoll, Ross* (CIR, 1985)<sup>19</sup>, che assume che il tasso di interesse a breve evolva nel tempo secondo un processo che incorpora la *mean reversion*, con un termine stocastico che ha una deviazione standard proporzionale alla radice del tasso a breve stesso:

---

<sup>16</sup> Rendlemann R. J., Barter B., (1980), *The pricing of option on debt securities*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 15 marzo, 11-24.

<sup>17</sup> Esistono riflessioni di ordine economico a favore del fenomeno di ritorno verso la media. Quando i tassi sono alti, l'economia tende a rallentare e c'è meno richiesta di finanziamenti (*drift* negativo); quando i tassi sono bassi, tende ad esserci una forte richiesta di finanziamenti (*drift* positivo).

<sup>18</sup> Vasicek O. A., (1977), *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Finance Economics, n.5, 177-88.

<sup>19</sup> Cox J. C., Ingersoll J.E., Ross S.A., (1985), *A theory of the term structure of interest rates*, Econometrica, 53, 385-407.

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

Ciò vuol dire che al crescere del tasso di interesse a breve, la sua deviazione standard aumenta e, quindi, in questo modello i tassi sono sempre non negativi.

I modelli *Short Rate* di equilibrio presentano un importante inconveniente: la *term structure* iniziale è un output del modello, piuttosto che un input, dunque la valutazione di uno strumento *risk rate sensitive* condotta con questa tipologia di modelli potrebbe non essere coerente con la *term structure* osservata sul mercato al momento della valutazione stessa.

Per superare questa limite, sono stati proposti in letteratura altri modelli di tipo *Short Rate*, i cosiddetti “*modelli ad arbitraggi nulli*”; si tratta di modelli progettati per essere coerenti con la *term structure* corrente, che rappresenta un input del modello stesso. A differenza di quanto accade in quelli di equilibrio, in questi modelli il *drift* del tasso a breve dipende dal tempo.

Tra i *modelli Short Rate* ad arbitraggi nulli si ricordano il:

- *modello di Ho e Lee* (1986): è il più semplice modello ad arbitraggi nulli ed è analiticamente trattabile. L’equazione differenziale stocastica che regola l’evoluzione nel tempo del tasso istantaneo d’interesse è:

$$dr = \theta(t)dt + \sigma d\xi$$

dove  $\sigma$  è la deviazione standard istantanea del tasso a breve (considerata costante nel tempo) e  $\theta(t)$  è una funzione del tempo scelta in modo che il modello sia coerente con la *term structure* iniziale.

- *modello di Hull e White* (1990)<sup>20</sup>: è una estensione del modello di *Ho e Lee*, che tiene conto della *mean reversion*. L’equazione differenziale che regola l’evoluzione nel tempo del tasso d’interesse è:

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma d\xi$$

in cui  $a$  (*mean reversion*) e  $\sigma$  (volatilità) sono costanti e  $\theta(t)$  è una funzione del tempo che può essere calcolata “fittando” la *term structure* corrente. Del modello classico di Hull-White è anche possibile un’estensione nella quale anche la volatilità è una funzione del tempo.

Tutti i modelli *Short Rate* finora introdotti sono modelli ad un fattore, ovvero con una sola “fonte” d’incertezza e perciò non in grado di riprodurre correttamente la correlazione esistente tra tassi d’interesse a diverse scadenze. Per superare questo tipo di problema, in letteratura sono stati proposti modelli *Short Rate* a due fattori<sup>21</sup>, come ad esempio il *modello di Hull e White a due fattori* ed il *modello G2*; questi modelli, tuttavia, hanno avuto una diffusione contenuta nella realtà operativa, in parte a causa del loro maggiore onere computazionale, ma anche perché non consentono a chi li usa di controllare in modo puntuale volatilità e correlazioni tra i tassi in corrispondenza dei diversi nodi temporali.

I modelli di tipo *Short Rate* ad arbitraggi nulli (in particolare il modello di Hull e White classico), invece, hanno avuto negli ultimi anni un notevole successo in diverse realtà operative, perché consentono di valutare in modo semplice prodotti finanziari *risk rate sensitive* con esercizio anticipato (*bermudan swaption*, *callable bond*, ..). Inoltre la loro implementazione numerica (necessaria nei casi in cui il modello non prevede una soluzione analitica) è relativamente semplice e poco onerosa dal punto di vista

<sup>20</sup> Hull J. C., White A., (1990), *Pricing interest rate derivatives securities*, Review of Financial Studies, 3, 573-92. Si vedano anche: Hull J. C., White A., (1993), *Bond option pricing based on a model for the evolution of bond prices*, Advances in Futures and Options Research, 6, 1-13; Hull J. C., White A., (1996), *Using Hull-White interest rate trees*, Journal of Derivatives, Spring, 26-36; Hull J. C., (2006), op. cit., cap. 28.

<sup>21</sup> Brigo D., Mercurio F., (2006), *Interest rate models: theory and practice*, second edition, Springer Finance, cap. 4.

computazionale, se si utilizzano gli *alberi multinomiali*<sup>22</sup>, per ottenere una rappresentazione in tempo discreto del processo stocastico che descrive l'andamento nel tempo del tasso istantaneo d'interesse.

Operativamente l'utilizzo di questi modelli prevede innanzitutto una fase di "calibrazione", il cui obiettivo è quello di determinare il valore ottimale dei parametri del modello, in modo tale che lo stesso sia in grado di valutare al meglio<sup>23</sup> un opportuno insieme di strumenti finanziari quotati sul mercato. Lo strumento per la calibrazione, generalmente, è scelto tra i *cap at the money* (ATM), qualora si intenda utilizzare il modello per stimare un *payoff* dipendente prevalentemente da tassi *forward*, o tra le *swaption europee*, qualora si debba stimare un *payoff* dipendente in prevalenza da *tassi swap*.

A titolo di esempio, si riporta nella tabella sottostante i risultati<sup>24</sup> del *pricing* di una *bermudan swaption* ottenuto con i modelli di Hull e White classico, G2 ed Hull e White esteso, considerando la volatilità costante a tratti.

La *bermudan swaption* utilizzata ha durata di 10 anni, prevede 10 date d'esercizio, una per anno, ed ha come sottostante un *vanilla swap* di tipo *payer* con nozionale pari a € 1.000.000.

Il prezzo è stato determinato utilizzando i dati di una *yield curve* reale al 22/08/2008, calibrando i modelli su un sottoinsieme<sup>25</sup> delle *swaption volatility* rilevate alla stessa data.

**Tabella n.2-Esempio: il pricing di una bermuda swaption**

	Prezzo del contratto
Modello di Hull e White classico	€ 29.116
Modello G2	€ 28.760
Modello di Hull e White esteso (volatilità costante a tratti)	€ 28.280

I prezzi equi riportati in tabella sono decisamente compatibili, ma presentano qualche differenza: prendendo come riferimento il valore prodotto dal *modello di Hull e White esteso*, il valore prodotto dal *modello Hull e White classico* differisce del 2.96% e quello prodotto dal *modello G2* del 1.70%. Tali differenze sono da imputare principalmente all'efficienza del processo di calibrazione, che dipende anche dal numero di parametri da ottimizzare che sono presenti nel modello. Nell'esempio proposto, il numero di parametri da calibrare è significativamente diverso per i tre modelli: per il *modello di Hull e White classico* i parametri di calibrazione sono solo 2, per il *modello G2* sono 4 e per il *modello Hull e White esteso* sono 10.

Nonostante il buon successo riscontrato nella prassi operativa, i modelli di tipo *Short Rate* presentano alcuni limiti:

- la variabile di cui consentono la stima dell'evoluzione nel tempo è il tasso d'interesse istantaneo, che non è un dato di mercato osservabile e, pertanto, risulta poco "naturale" rendere ogni output del modello aderente alle condizioni di mercato al momento del *pricing*;
- non sono in grado di riprodurre correttamente la struttura di correlazione dei tassi a breve con scadenze diverse che si riscontra sul mercato;
- non permettono la calibrazione contemporanea a *cap* e *swaption volatility*<sup>26</sup>: ciò in taluni casi può rappresentare una forte criticità. Infatti, qualora si voglia valutare un prodotto fortemente dipendente dai tassi swap con tali modelli si deve necessariamente ricorrere ad una calibrazione basata solo sulla matrice delle *swaption volatility*, non utilizzando affatto le *cap ATM volatility*, che in realtà rappresentano il dato più liquido che il mercato offre. In taluni

<sup>22</sup> Cfr. Hull J. C., (2006), op. cit., cap. 28, § 6 e 7.

<sup>23</sup> La procedura di calibrazione, in generale, determina il valore ottimale dei parametri del modello minimizzando la somma dei moduli quadri delle differenze tra il valore quotato e quello stimato del singolo strumento di calibrazione scelto.

<sup>24</sup> I valori riportati nella successiva tabella sono stati ottenuti con il *multi-pricer* sviluppato presso il CASPUR e basato sulle funzionalità della libreria *open-source* QuantLib, <http://www.quantlib.org>.

<sup>25</sup> Il sottoinsieme dei dati di mercato scelti per calibrare i modelli comprende solo i nodi della matrice delle *swaption volatility* compatibili con le date d'esercizio della *bermudan swaption* da valutare.

<sup>26</sup> Brigo D., Mercurio F. (2006), op. cit., cap. 4, § 2.7.

casi, tra l'altro, la struttura del prodotto da valutare potrebbe richiedere di calibrare il modello utilizzando proprio alcuni nodi della matrice delle *swaption volatility* che possono essere piuttosto illiquidi, finendo così per ottenere dal modello valutazioni non completamente aderenti alla reale situazione di mercato.

Una risposta alle problematiche appena illustrate viene data dalla più moderna generazione di modelli: i *Market Model*.

### 5. Introduzione ai Market Model

I *Market Model* costituiscono una classe di modelli che specifica la dinamica di tassi direttamente osservabili sul mercato, tipicamente tassi *forward* nel *LIBOR Market Model* o tassi *swap* nello *Swap Market Model*, garantendo una aderenza completa con la struttura corrente dei tassi e con i valori dei derivati *plain-vanilla*. Caratteristica comune a questi modelli è la completa coerenza dell'impianto teorico del *framework* con la formula di *Black* per il mercato dei *cap* e *swaption* rispettivamente nel *LIBOR* e nello *Swap Market Model*.

Il *LIBOR Market Model*, originariamente proposto da Brace, Gatarek e Musiela<sup>27</sup>, consente la descrizione della dinamica di  $n$  tassi *forward* con il medesimo *tenor*. Il modello è calibrato automaticamente ai *caplet at-the-money* e consente il *pricing* di prodotti derivati, anche *path-dependent*, i cui *payoff* dipendono simultaneamente dallo stato, ad un certo istante e/o dall'evoluzione nel tempo, di uno o più tassi *forward* (ad esempio prodotti come *TARN*, *ratchet*, ..).

Lo *Swap Market Model*, originariamente proposto da Jamshidian<sup>28</sup> e successivamente esteso e generalizzato nei lavori di Galluccio *et al.*<sup>29</sup>, costituisce un modello di più recente diffusione che descrive l'evoluzione nel tempo di un insieme di tassi *swap*. Il modello è calibrato automaticamente alle *swaption europee*, e consente il *pricing* di strumenti con componenti opzionali composite (ad esempio le *bermudan swaption*).

Sempre Galluccio *et al.*, hanno poi mostrato l'esistenza di una relazione esplicita ed invertibile che lega le variabili dinamiche dello *Swap Market Model* con quelle del *LIBOR Market Model*, aprendo così la strada a tecniche di calibrazione congiunta dei due modelli agli *at-the-money caplet* ed alle *swaption europee*.

Nel *framework* dei *Market Model*, la dinamica dei tassi è log-normale ed è specificata da un insieme di equazioni differenziali stocastiche, una per ciascun tasso, in cui i termini aleatori sono mutuamente correlati; l'evoluzione nel tempo dell'*i-esimo* tasso è descritta da un termine di *drift* dipendente dagli altri tassi e dal tempo, e da un termine aleatorio che, di fatto, è una componente di *moto browniano multi-dimensionale*:

$$\frac{df_i(t)}{f_i(t)} = \sum_k \frac{\tau_k f_k(t) \sigma_i(t) \sigma_k(t) \rho_{ik}(t)}{1 + \tau_k f_k(t)} dt + \sigma_i(t) dz_i \quad i = 1, n$$

dove  $\sigma_i$  è la volatilità istantanea del tasso  $f_i$  e  $\rho_{ik}$  è la correlazione istantanea tra i tassi  $f_i$  e  $f_k$ . Gli estremi della sommatoria nel termine di *drift* dipendono dalla scelta del numerario, che può legare tra loro i tassi con indici superiori o inferiori.

Proprio l'ipotesi di un *moto browniano multi-dimensionale correlato* consente al modello di incorporare, nel termine di *drift*, informazioni sulla struttura della correlazione e della covarianza dei tassi nel tempo:

$$dz_i dz_k = \rho_{ik} dt \quad , \quad cov(f_i, f_k) = \sigma_i \sigma_k \rho_{ik}$$

La caratteristica suddetta ha reso i *Market Model* uno strumento ideale per il *pricing* di prodotti finanziari che dipendono fortemente dalla forma e dall'evoluzione delle correlazioni tra tassi d'interesse,

<sup>27</sup> Brace A., Gatarek D., Musiela M., (1996), *The market model of interest rate dynamics*, Mathematical Finance, n. 7.

<sup>28</sup> Jamshidian F., (1997), op. cit.

<sup>29</sup> Galluccio S., Huang Z., Ly J.-M., Scaillet O., (2005), *Theory and calibration of Swap Market Models*, SSRN, working paper, <http://www.ssrn.com>.



superando i limiti dei *modelli Short Rate*, che non consentono di descrivere correttamente le correlazioni dei tassi, così come sono state evidenziate dall'analisi dei dati storici di mercato<sup>30,31</sup>.

La potenza descrittiva dei *Market Model* va a scapito della sua trattabilità numerica; l'alta dimensionalità del modello rende non appropriate le tecniche di discretizzazione nel tempo basate su alberi multinomiali che, invece, sono state utilizzate con successo negli *Short Rate model*. Pertanto è necessario fare ricorso a tecniche di tipo Monte Carlo<sup>32,33</sup>, discretizzando l'evoluzione temporale ai nodi della *term structure* di interesse per il prodotto da valutare.

Il *pricing* di un prodotto nel *framework Market Model* richiede quindi la generazione di numerosi scenari, ciascuno descritto dalla completa evoluzione nel tempo dei tassi alle date di interesse per i *pay-off* del prodotto, e un'operazione di media dei *discounted cash-flow* ottenuti per ogni singolo scenario.

Per utilizzare concretamente questa tipologia di modelli è necessario definire le forme funzionali che descrivono l'andamento di  $\sigma_i(t)$ , la volatilità istantanea del singolo tasso nel tempo, e di  $\rho_{ik}(t)$ , la matrice di correlazione tra i diversi tassi.

Per quanto concerne l'andamento nel tempo della volatilità, in letteratura sono state proposte diverse alternative<sup>34</sup>, da quelle più semplici, che prevedono che le singole volatilità siano costanti a tratti nei singoli intervalli di tempo e che consentono una calibrazione analitica del modello alle *implied volatility*, a formulazioni più complesse, che incorporano anche la *time homogeneity* osservata sul mercato, del tipo:

$$\sigma_i(t_i - t) = k_i([a + b(t_i - t)]e^{-c(t_i - t)} + d)$$

in cui  $t_i$  è la *maturity* dell' $i$ -esimo tasso ed i parametri  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , e  $\{k_i\}$  devono essere determinati attraverso una procedura di calibrazione numerica.

Anche per la matrice di correlazione  $\rho_{ik}$ , in letteratura sono state proposte diverse scelte: da quelle che prevedono che la matrice sia calcolata sulla base di dati storici, a quelle che invece propongono una formulazione parametrica che riproduca il decadimento esponenziale della correlazione tra tassi che si riscontra empiricamente. Una forma parametrica comunemente utilizzata<sup>34</sup> è la seguente:

$$\rho_{ik} = e^{-\beta||t_i - t|^\gamma - |t_k - t|^\gamma|}$$

che consente di ottenere decadimenti esponenziali differenti per tassi vicini, ma con scadenze molto diverse; in tal caso i parametri possono anche essere determinati attraverso una calibrazione numerica.

Numerosi sono gli studi che analizzano e mettono a confronto le diverse tecniche di calibrazione del modello, con particolare attenzione al *LIBOR*, per il quale, dalla sua introduzione, è prassi calibrare le volatilità istantanee al mercato degli *ATM caplet* e determinare i parametri di correlazione attraverso la calibrazione verso *swaption europee*.

Tuttavia una calibrazione in due fasi, la prima per la volatilità dei tassi *forward* agli *ATM caplet*, la seconda per la matrice di correlazione alle *swaption europee*, fornisce un modello che, sovente, presenta significative instabilità numeriche nell'evoluzione delle curve di volatilità e covarianza<sup>35</sup>. In un recente lavoro di Joshi e Ametrano<sup>35</sup>, viene proposta una tecnica di calibrazione congiunta all'*at-the-money caplet* e alle *swaption* della intera matrice di covarianza, che produce un modello con una ottima aderenza alla situazione di mercato al momento della valutazione e una eccellente e stabile capacità predittiva.

<sup>30</sup> Jamshidian F, Zhu Y., (1997), *Scenario simulation: theory and methodology*, Finance and Stochastics, n. 1, table 1.

<sup>31</sup> Rebonato R., (1998), *Interest rate option models*, seconda edizione, cap. 3, table 3.2.

<sup>32</sup> Jackel P., (2002), *Monte Carlo methods in finance*, John Wiley & Sons.

<sup>33</sup> Glasserman P., (2003), *Monte Carlo methods in financial engineering*, Springer.

<sup>34</sup> Per una *review* completa e aggiornata delle varie parametrizzazioni, si veda Brigo D., Mercurio F., (2006), op.cit..

<sup>35</sup> Ametrano F., Joshi M., (preprint 2008), *Smooth simultaneous calibration of the LMM to caplets and co-terminal swaptions*.

---

In generale, l'implementazione dei *Market Model* richiede non poche accortezze computazionali: ad ogni *time-step* bisogna calcolare il termine di *drift* e generare  $N$  numeri casuali da una distribuzione normale correlata. Una implementazione *naive* del termine di *drift* potrebbe portare il calcolo a un ordine  $O(N^3)$ , mentre come osservato da Joshi<sup>36</sup> è possibile ricondurlo ad un ordine  $O(N^2)$  riutilizzando delle quantità intermedie, invariante rispetto all'indice del tasso evoluto. Inoltre, l'interdipendenza dei tassi nel termine di *drift* rende impossibile una sua soluzione analitica tra *time-step* e, quindi, oltre alla necessità di darne una forma approssimata<sup>37</sup>, è necessario ricalcolarlo a ogni passo temporale.

Queste difficoltà implementative e l'onerosità computazionale del Monte Carlo hanno reso i *Market Model* strumenti scarsamente diffusi tra i *practitioner* o sperimentati in poche istituzioni finanziarie. Tuttavia le moderne tecnologie computazionali oggi disponibili sul mercato consentono di realizzare implementazioni robuste, efficienti e veloci dei *Market Model*: infatti, gli scenari di una simulazione Monte Carlo sono completamente indipendenti l'uno dall'altro e, quindi, possono essere generati in parallelo sfruttando a pieno sia le infrastrutture di calcolo dotate di processori *multi-core*, sia i *cluster* per HPC (*High Performance Computing*), che tanto successo hanno riscosso negli ultimi anni nel settore del calcolo tecnico-scientifico.

Il nostro *multi-pricer*<sup>24</sup> contiene un'implementazione dei *Market Model* che è anche in grado di utilizzare l'enorme potenza computazionale disponibile sulle schede grafiche di ultima generazione (*GP-GPU computing*<sup>38</sup>). Questa implementazione consente la calibrazione congiunta a *at-the-money caplet* e *swaption europee* ed è in grado di valutare prodotti finanziari complessi con esercizio anticipato e/o *path-dependent*, producendo risultati accurati e ben aderenti con i dati di mercato.

Un'analisi preliminare delle performance dell'applicazione mostra che, utilizzando un personal computer dotato di una scheda grafica di ultima generazione, i tempi di calcolo necessari alla valutazione con *Market Model* risultano del tutto confrontabili con quanto necessario per valutare prodotti finanziari con modelli di tipo *Short Rate*.

Questo risultato può essere di estremo interesse per la realtà operativa, perché è in grado di spostare radicalmente i termini del compromesso tra qualità del modello di *pricing* e onere computazionale necessario alla valutazione. E' proprio questo *trade-off* che finora ha determinato il successo dei modelli di tipo *Short Rate* e, parallelamente, la scarsa diffusione dei *Market Model*, nella realtà operativa stessa.

## 6. Riflessioni per l'attività di risk management e conclusioni

I prodotti di finanza strutturata rappresentano l'evoluzione più sofisticata dell'attività di intermediazione finanziaria. Si tratta di prodotti complessi che richiedono dal punto di vista del *risk management*:

1. l'individuazione e la composizione delle singole componenti che definiscono i citati prodotti;
2. l'implementazione di sofisticate tecniche di *pricing*;
3. la corretta definizione del complesso dei tassi di mercato da utilizzare come input dei modelli di *pricing*;
4. la definizione degli indicatori di sensitività del valore dei citati strumenti ai diversi fattori di rischio sottostanti, nonché l'impianto di misure di rischio su base probabilistica.

I prodotti di finanza strutturata su tassi d'interesse presentano livelli di particolare complessità valutativa in quanto:

- a) il comportamento probabilistico dei tassi d'interesse è più complesso rispetto a quello di altre variabili finanziarie, quali ad esempio un titolo azionario o un tasso di cambio;

---

<sup>36</sup> Joshi M., (2003), *Rapid drift computations in the LIBOR Market Model*, Wilmott, May 2003.

<sup>37</sup> Joshi M., Stacey A.M., (2008), *New and robust drift approximations for the LIBOR Market Model*, Quantitative Finance, 4 June.

<sup>38</sup> Per dettagli sul GP-GPU *computing* si veda [http://www.nvidia.com/object/cuda\\_home.html](http://www.nvidia.com/object/cuda_home.html).

- 
- b) un portafoglio di strumenti su tassi d'interesse richiede l'implementazione di un *framework* valutativo in grado di descrivere la possibile evoluzione del tempo della curva dei tassi d'interesse;
  - c) i tassi d'interesse vengono utilizzati sia nella definizione dei valori finali di tali prodotti che nell'attualizzazione degli stessi.

Negli ultimi anni, i portafogli di negoziazione degli intermediari finanziari sono stati caratterizzati dalla crescente presenza di strumenti derivati *risk rate sensitive* di tipo complesso; ciò ha imposto alle funzioni di *risk management* l'implementazione di tecniche di *pricing* più evolute rispetto a quelle della prima letteratura scientifica per ottenere una corretta valorizzazione dei *deal* ai fini di bilancio.

La presenza crescente nei portafogli proprietari di prodotti su tassi d'interesse aventi caratteristiche diverse dalle classiche opzioni di stile europeo (quali *cap/floor*, *swaption*, *bond option*) ha causato che, accanto al tradizionale *modello di Black*, si siano affermate tecniche di *pricing* più evolute come, in primo luogo, gli *Short Rate model*, che sono in grado di descrivere dal punto di vista quantitativo (a differenza del *modello di Black*) le modalità con cui può evolvere nel corso del tempo la curva dei tassi. Tale caratteristica permette di impiegare i citati modelli nel *pricing* di un'ampia gamma di derivati su tassi d'interesse (ad esempio *callable swap* di tipo americano, *ratchet*, *callable range accrual*, ecc..) il cui valore finale è funzione della dinamica della curva dei tassi durante il corso di vita dei citati prodotti.

Intuitivamente è possibile pensare che la dinamica dei tassi d'interesse possa essere rappresentata da un numero limitato di fattori di rischio e ogni fattore di rischio da uno specifico tasso della curva. Come precedentemente descritto in questo lavoro, gli *Short Rate model* individuano un solo fattore di rischio rappresentato dall'incertezza della curva dei tassi, ovvero dal rendimento di un ipotetico titolo con scadenza istantanea. Modellizzando la dinamica del tasso d'interesse istantaneo è possibile, attraverso la relazione che lo lega a tutti gli altri tassi della curva per scadenze, definire l'evoluzione di quest'ultima.

Gli *Short Rate model* hanno trovato larga diffusione tra i motori di calcolo in dotazione al *risk management* in quanto:

1. l'evoluzione nel corso del tempo della curva dei tassi risulta coerente con l'informazione contenuta nella *yield curve* di mercato al momento della valutazione;
2. il processo computazionale non risulta particolarmente oneroso.

A fronte di tali aspetti positivi, gli *Short Rate model* presentano tuttavia dei limiti: tra questi quello più importante è che il tasso istantaneo d'interesse non è una variabile direttamente osservabile sul mercato. Sotto questo profilo può dunque apparire strano modellizzare l'evoluzione di un fattore di rischio che non è osservato sul mercato per ricavare informazioni sulla dinamica dei tassi osservati, piuttosto che modellizzare questi ultimi. L'idea che sta alla base di *LIBOR* e *Swap Market Model*, oggetto di analisi del presente studio, è quella di invertire tale processo studiando la dinamica di scadenze osservabili sulla curva dei tassi e cercando di ricavare informazioni sulla possibile evoluzione dell'intera curva. L'implementazione del *LIBOR/Swap Market Model* per l'attività di *risk management* ha le seguenti implicazioni:

1. consente di avere la disponibilità di un *framework* valutativo dall'elevata capacità descrittiva della dinamica dei tassi d'interesse; ciò è reso possibile anche attraverso la calibrazione dei prezzi del modello a quelli dei *cap/floor* e *swaption*, ovvero di strumenti che incorporano le aspettative del mercato sull'andamento futuro dei sottostanti (tassi *LIBOR* e tassi *swap*);
2. permette di consolidare il presidio sulla qualità dei dati di mercato che vengono utilizzati in input dai processi valutativi; infatti, poiché le stime prodotte dal modello dipendono dalla qualità dei dati su cui viene operata la procedura di calibrazione, ne consegue la necessità/opportunità di utilizzare dati il più possibile rappresentativi dei valori di mercato per avere stime attendibili di *fair value*.

---

Quest'ultimo aspetto peraltro è un requisito richiesto dagli stessi *regulator*, la regolamentazione prudenziale e quella contabile (Banca d'Italia, circ. 263, 2006 e IAS/IFRS 39) impongono che i modelli di *pricing* siano oggetto, oltre che di validazione interna da parte del *risk management*, anche di collaudo iniziale del valore e calibrazione periodica al fine di produrre attendibili stime di *fair value* nel corso del tempo.

La notevole riduzione dei tempi di valutazione consentita da una implementazione dei Market Model che utilizzi le più moderne tecnologie per il calcolo ad alte prestazioni (HPC) è un elemento chiave per l'introduzione di questa tipologia di modelli nella realtà operativa, se si pensa al fatto che oggetto di valorizzazione *mark to model* sono sovente portafogli proprietari caratterizzati da un numero considerevole di contratti da valutare, molte dei quali ad elevata complessità finanziaria.

Peraltro la velocità computazionale è un aspetto apprezzato dagli stessi *trader* nel momento in cui devono velocemente valutare il prezzo *fair* di un possibile *deal* sul mercato.

Da ultimo, ma non meno importante, vi è un ulteriore aspetto da considerare nel valutare l'importanza di implementare il *LIBOR/Swap Market Model*, che riguarda la gestione dei rischi: infatti, poiché la procedura di calibrazione del modello richiede di specificare i parametri della volatilità e delle correlazioni in modo che i prezzi dei derivati su tassi *plain-vanilla* (*cap/floor* e *swaption*) e la curva dei tassi siano correttamente riprodotti dal modello, ne segue che l'*hedging* dei derivati su tassi complessi risulterebbe coerente con i prezzi di mercato dei primi.

---

## BIBLIOGRAFIA

- Ametrano F., Joshi M., (preprint 2008), *Smooth simultaneous calibration of the LMM to caplets and co-terminal swaptions*.
- Bank for International Settlements (BIS), (2008), *Quarterly Review*, <http://www.bis.org>.
- Black F., Scholes M., (1973), *The pricing of options and corporate liabilities*, *Journal of Political Economy*, 81, May-June, 673-59.
- Black, F., (1976), *The Pricing of Commodity Contracts*, *Journal of Financial Economics*, 3, 167-179.
- Brace A., Gatarek D., Musiela M., (1996), *The market model of interest rate dynamics*, *Mathematical Finance*, n. 7.
- Brigo D., Mercurio F., (2006), *Interest rate models: theory and practice*, second edition, Springer Finance.
- Cox J. C., Ingersoll J.E., Ross S.A., (1985), *A theory of the term structure of interest rates*, *Econometrica*, 53, 385-407.
- Daniel R., Marc Y., (1999), *Continuous Martingales and Brownian motion*, 3rd edition Springer.
- Dellacherie C. Meyer P.A, (1980), *Probabilités et potential. Théorie de Martingales*, Chapitre VII, Hermann.
- Di Franco M., Polimeni F., Proietti M., (2002), *Opzioni e titoli strutturati*, Il sole 24 ORE, Milano.
- Fama E. F., (1970), *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*, *Journal of Finance*, vol. 25, n. 2.
- Galluccio S., Huang Z., Ly J.-M., Scaillet O., (2005), *Theory and calibration of Swap Market Models*, SSRN, working paper, <http://www.ssrn.com>.
- Glasserman P., (2003), *Monte Carlo methods in financial engineering*, Springer.
- Group of Thirty, *Derivatives: Practices and Principles*, <http://www.group30.org>.
- Harrison, J.M. e Kreps, D., (1979), *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets*, *Journal of Economic Theory*.
- Harrison, J.M. e Pliska S.R., (1981), *Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading*, *Stochastic Processes and Their Applications*.
- Hida T., (1980), *Brownian Motion*, Springer, 1980; Karatzas I., S. Shreve, (1998), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer.
- Hull J. C., (2006), *Opzioni, futures e altri derivati*, Pearson, Prentice Hall.
- Hull J. C., White A., (1990), *Pricing interest rate derivatives securities*, *Review of Financial Studies*, 3, 573-92.
- Hull J. C., White A., (1993), *Bond option pricing based on a model for the evolution of bond prices*, *Advances in Futures and Options Research*, 6, 1-13;
- Hull J. C., White A., (1996), *Using Hull-White interest rate trees*, *Journal of Derivatives*, Spring, 26-36.
- Jackel P., (2002), *Monte Carlo methods in finance*, John Wiley & Sons.
- Jamshidan F., (1997), *The LIBOR and Swap market Model*, *Finance and Stochastics*, 293-330.
- Jamshidian F, Zhu Y., (1997), *Scenario simulation: theory and methodology*, *Finance and Stochastics*, n. 1, table 1.
- Joshi M., (2003), *Rapid drift computations in the LIBOR Market Model*, Wilmott, May 2003.
- Joshi M., Stacey A.M., (2008), *New and robust drift approximations for the LIBOR Market Model*, *Quantitative Finance*, 4 June.
- Lenglart E., (1977), *Transformation de martingales locales par changement absolue continu de probabilités*, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeit*, 39.
- Merton R. C., (1973), *The relationship between put and call prices: comment*, *Journal of Finance*, 28, 183-4.

- 
- Merton R. C., (1973), *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science, Spring, 141-83.
  - Rebonato R., (1998), *Interest rate option models*, seconda edizione, cap. 3, table 3.2.
  - Rendlemann R. J., Bartter B., (1980), *The pricing of option on debt securities*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 15 marzo, 11-24.
  - Resti A., Sironi A., (2007), *Rischio e valore nelle banche. Misura, regolamentazione, gestione*, cap. 17, Milano, Egea.
  - Vasicek O. A., (1977), *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Finance Economics, n.5, 177-88.

#### **SITOGRAFIA**

- <http://www.group30.org/>
- <http://www.bis.org>
- <http://www.ssrn.com>.
- [http://www.nvidia.com/object/cuda\\_home.html](http://www.nvidia.com/object/cuda_home.html).